6. Na površi (sfera)

$$\vec{r} = (a\cos v \sin u, a\sin v \sin u, a\cos u), \quad u \in [0,\pi], v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krive c_1 i c_2 sa $c_1 : u = v$ i $c_2 : \overline{u} + \overline{v} = \frac{\pi}{2}$.

(a) Naći presječne tačke datih krivih.

(b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

7. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u\sin v,\ u\cos v,\ v).$$

Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \le u \le \mathrm{sh} v,\ 0 \le v \le v_0.$$

Izračunati uglove trougla.

13 Površina ograničenog dijela površi

Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva - koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M) = \text{const.}$ i $V(M) = \text{const.}$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni. Ako su linije $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ prave, sistem koordina se naziva pravoliniski koordiatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ kriva, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivoliniski ili Gausov koordinatni sistem.

Neka je dana površ S svojom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada se površina područja (K) računa po formuli

$$P = \iint\limits_{(K)} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

gdje je D zatvoreno područje u ravni takvo da je $\vec{r}(D) = (K)$.

Nije teško pokazati da vrijedi

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = \vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

Izraz

$$EG - F^2 = W^2$$

koji je uvijek pozitivan naziva se diskriminanta prve diferencijalne forme ili Weingartenova funkcija.

Primjetimo, ponovo, da jedinični vektor normale sada glasi

$$\vec{n}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

8. Zadana je ploha $\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + \sin u\vec{b} + v\vec{c}, u,v \in \mathbb{R}$ gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati vektori.

(a) Ispitati šta su koordinatne krive.
(b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme.
(c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sijeći ortogonalno?
(d) Naći element površine dS dane plohe.

9. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = a u \cos v$, $y = a u \sin v$, $z = b v$ (gdje su $u, v \in \mathbb{R}$), ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

10. Naći površinu torusa $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

11. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v,\ u \cos v,\ v).$$

(a) Naći prvu kvadratnu formu površi.
(b) Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \leq u \leq \mathrm{sh} v,\ 0 \leq v \leq v_0.$$

Izračunati površinu i dužine strana trougla.

12. Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na površi $z = z(x, y)$.